

## Modèles de rupture fragile

Jérémy Bleyer, Anne-Françoise Gourgues-Lorenzon

### Objectifs:

- Appliquer les concepts du modèle de Griffith par la méthode de la souplesse
- Évaluer un critère de propagation de fissure et discuter de la stabilité de la propagation
- Comprendre les principes généraux du modèle de Beremin
- Discuter de son calibrage sur des données réelles

## 1 Théorie de Griffith : essai *End-Notched Flexure* (ENF)

L'essai ENF (End-Notched Flexure) consiste en une flexion 3 points d'une poutre entaillée à mi-hauteur par une préfissure de longueur initiale  $a_0$  débouchant à une des extrémités de la poutre (Figure 1). Cet essai est notamment utilisé pour caractériser les propriétés de délaminage d'interface des matériaux composites multicouches.

La poutre de longueur  $L$ , de hauteur  $2h$  et de largeur  $b$ , est simplement appuyée à ses extrémités et chargée par un effort ponctuel vertical  $F$  appliqué au centre de la poutre. On note  $q$  le déplacement vertical du point d'application de la force et  $Q = F/b$  l'intensité de la force par unité de largeur. Une expression analytique approchée de la relation force/déplacement peut-être obtenue à l'aide d'une modélisation simplifiée reposant sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli [Allix et al., 1995]. Pour une fissure de taille  $a$  fixée, la relation force/déplacement s'exprime comme :

$$q = \begin{cases} \frac{L^3/12 + a^3}{32D} Q & \text{si } a \leq L/2 \\ \frac{L^3/3 - (L-a)^3}{32D} Q & \text{si } a \geq L/2 \end{cases} \quad (1)$$

où  $D = Eh^3/12$  est la raideur en flexion d'une moitié de poutre par unité de largeur.

1.0. Quel est le mode principal de sollicitation de la fissure ?

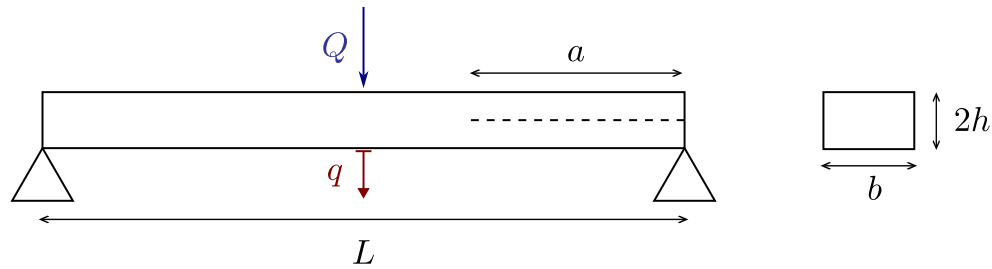


FIGURE 1 – Essai ENF

**Solution :** Sur appui, la fissure est sollicitée principalement par des contraintes de cisaillement, soit une fissuration en mode II. On pourra faire remarquer que la fissure est également soumise à des contraintes de compression. Dans le cas de poutres très élancées ( $h \ll L$ ), celles-ci sont en général de faible amplitude vis-à-vis des contraintes de cisaillement.

## 1.1 Rappels préliminaires

- 1.1. On note  $S(a) = q/Q$  la souplesse de la structure par unité de largeur, à longueur  $a$  de fissure fixée. Donner la valeur de l'énergie potentielle  $\mathcal{P}$  (par unité de largeur) de la solution suivant que l'on pilote : (a) en force, (b) en déplacement.

**Solution :** Par définition de la souplesse, l'énergie élastique par unité de largeur vaut :

$$E_{el} = \frac{1}{2}S(a)Q^2$$

Lorsque l'on pilote en force, on donc :

$$\mathcal{P} = E_{el} - W_{ext} = \frac{1}{2}S(a)Q^2 - Qq = -\frac{1}{2}S(a)Q^2$$

tandis que si l'on pilote en déplacement : on a :

$$\mathcal{P} = E_{el} = \frac{1}{2}S(a)Q^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{S(a)}$$

notons que dans ce cas, on a réexprimé l'énergie potentielle en fonction du paramètre de chargement, ici le déplacement  $q$ .

- 1.2. En déduire le taux de resitution d'énergie  $\mathcal{G}$  dans les deux modes de pilotage de chargement.

**Solution :** De manière générale :

$$\mathcal{G} = -\frac{d\mathcal{P}}{da}$$

On a alors pour un pilotage en force :

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}S'(a)Q^2$$

et pour un pilotage en déplacement :

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}S'(a)\left(\frac{q}{S(a)}\right)^2 = \frac{1}{2}S'(a)Q(a)^2$$

- 1.3. Rappeler la condition de propagation et de stabilité/instabilité de propagation de la fissure.

**Solution :** Il y a propagation lorsque  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$ . La propagation sera stable si  $\mathcal{G}'(a) < 0$  tandis qu'elle sera instable sinon.

## 1.2 Application à l'essai ENF : pilotage en force

Dans cette section, on se limite au **pilotage en force**.

- 1.4. Dans le cas  $a \leq L/2$ , déterminer la condition de propagation de la fissure. Discuter du caractère stable ou instable de la propagation.

**Solution :** On a ici :

$$S'(a) = \frac{3a^2}{32D} \quad \text{soit } \mathcal{G} = \frac{3Q^2a^2}{64D}$$

Ainsi, la fissure ne se propage pas tant que :

$$Q \leq Q_c = \sqrt{\frac{64D\mathcal{G}_c}{3a_0^2}}$$

Au delà de  $Q_c$ , comme  $\mathcal{G}'(a_0) > 0$ , la propagation est instable.

1.5. Faire de même pour le cas  $a \geq L/2$ .

**Solution :** On a dans ce cas :

$$S'(a) = \frac{3(L-a)^2}{32D} \quad \text{soit } \mathcal{G} = \frac{3Q^2(L-a)^2}{64D}$$

Ainsi, la fissure ne se propage pas tant que :

$$Q \leq Q_c = \sqrt{\frac{64D\mathcal{G}_c}{3(L-a_0)^2}}$$

Au delà de  $Q_c$ , comme

$$\mathcal{G}'(a_0) = -\frac{6Q^2(L-a_0)}{64D} < 0,$$

la propagation est stable.

### 1.3 Application à l'essai ENF : pilotage en déplacement

Dans cette section, on se limite au **pilotage en déplacement** et au cas  $a \leq L/2$ .

1.6. Déterminer la condition de propagation de la fissure.

**Solution :** On a toujours :

$$S'(a) = \frac{3a^2}{32D} \quad \text{soit } \mathcal{G} = 48Dq^2 \frac{a^2}{(L^3/12 + a^3)^2}$$

Ainsi, la fissure ne se propage pas tant que :

$$q \leq q_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}_c}{48D} \frac{L^3/12 + a_0^3}{a_0}}$$

1.7. Discuter du caractère stable ou instable de la propagation. On pourra pour cela s'appuyer sur le graphe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2}{(1/12 + x^3)^2}$  représenté sur la Figure 2.

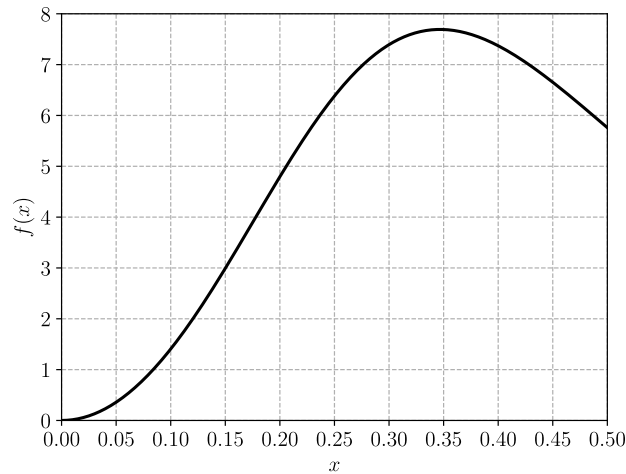
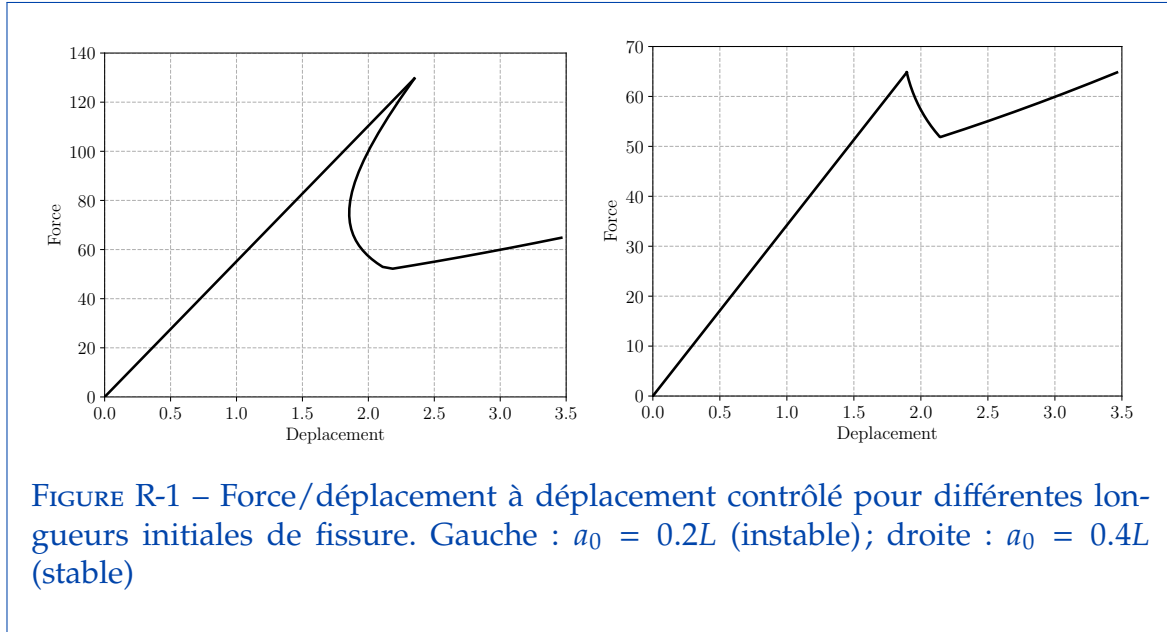


FIGURE 2 – Graphe de la fonction  $f(x) = \frac{x^2}{(1/12 + x^3)^2}$

**Solution :** Au delà de  $q_c$ , la stabilité est conditionnée par le signe de  $\mathcal{G}'(a_0)$  qui est lié au signe de  $f'(a_0/L)$  pour la fonction  $f$  indiquée par l'énoncé. Graphiquement, on trouve que cette dérivée est positive si  $a_0/L < 0.35$  environ, correspondant à une propagation instable. Pour des fissures initialement plus grandes que  $0.35L$  la propagation est stable.

Notons que l'étude de variation exacte de la fonction conduit à la condition  $a_0 \geq \left(\frac{1}{24}\right)^{1/3} L \approx 0.347L$ . Ces différentes conditions de stabilité se traduisent également dans l'évolution de la courbe force/déplacement suivant la taille de la préfissure.



## 2 Exploration du modèle de Beremin

Le modèle de Beremin suppose que dans tout volume élémentaire  $V_0$ , la taille  $a$  des défauts susceptibles de provoquer le clivage est régie par une densité de probabilité en loi puissance :

$$p(a) = \alpha a^{-\beta} \quad (2)$$

avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 1$ .

2.1. En considérant un critère de Griffith pour la propagation de micro-défauts, montrer que la probabilité de rupture sous une contrainte  $\sigma$  donnée s'écrit en :

$$P(\sigma) \propto \sigma^m \quad (3)$$

où  $m$  s'exprime en fonction de  $\beta$ .

**Solution :** Pour que sous une contrainte  $\sigma$ , il y ait propagation instable d'une fissure à partir d'un défaut de taille  $a$ , il faut que le taux de restitution d'énergie dépasse une valeur critique. Cela se produit pour des défauts d'une taille supérieure à une valeur critique,  $a_c$ . Pour une fissure en forme de sou (*penny-shape*), le facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie s'écrivent :

$$K_I = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

$$\mathcal{G} = \frac{(1 - \nu^2)}{E} K_I^2 = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi E} a \sigma^2$$

Le critère de Griffith s'écrit alors  $\mathcal{G} \leq \mathcal{G}_c$ . Ainsi la taille critique  $a_c$  correspondant à la propagation instable d'un défaut s'obtient par  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_c$  soit :

$$a_c(\sigma) = \frac{\pi E \mathcal{G}_c}{4(1 - \nu^2) \sigma^2} = \frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2) \sigma^2}$$

en notant  $\mathcal{G}_c = 2\gamma_s$ .

La probabilité de rupture correspond alors à la probabilité, pour une contrainte  $\sigma$  donnée, de trouver un défaut de taille supérieure ou égale à  $a_c$ , soit :

$$P(\sigma) = \int_{a_c(\sigma)}^{\infty} p(a) da = \left[ \frac{\alpha}{1 - \beta} a^{1-\beta} \right]_{a_c(\sigma)}^{\infty} = \frac{\alpha}{\beta - 1} a_c^{1-\beta} = \frac{\alpha}{\beta - 1} \left( \frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2)} \right)^{1-\beta} \sigma^{2\beta-2}$$

On a donc bien :

$$P(\sigma) \propto \sigma^m$$

en identifiant  $m = 2\beta - 2 > 0$ .

2.2. En introduisant la contrainte de normalisation  $\sigma_u$  de sorte que

$$P(\sigma) = \left( \frac{\sigma}{\sigma_u} \right)^m, \quad (4)$$

relier  $\sigma_u$  aux paramètres mécaniques et aux paramètres de distribution des défauts  $\alpha, \beta$ .

**Solution :** En reprenant les expressions précédentes, on a :

$$P(\sigma) = \frac{2\alpha}{m} \left( \frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2)} \right)^{-m/2} \sigma^m = \frac{\sigma^m}{\frac{m}{2\alpha} \sqrt{\left( \frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2)} \right)^m}}$$

On a alors :

$$\sigma_u = \left( \frac{m}{2\alpha} \right)^{1/m} \sqrt{\frac{\pi E \gamma_s}{2(1 - \nu^2)}}.$$

## 2.1 Application à un acier bas carbone

On considère dans la suite de cet exercice un acier à bas carbone s'appuyant sur les résultats de la thèse d'Astrid Lambert-Perlade [Lambert-Perlade, 2001]. Ses propriétés en traction uniaxiale à basse température (-170°C) sont les suivantes : limite d'élasticité 729 MPa, contrainte à rupture 978 MPa, allongement maximum réparti 11%, allongement à rupture 25%, réduction d'aire à rupture 78%.

2.3. Peut-on calibrer une loi de Weibull pour modéliser sa résistance à la rupture fragile ?

**Solution :** La réduction d'aire à rupture est très élevée et suggère une rupture ductile, tout comme l'allongement à rupture. Il est peu probable que ce type d'essai mette en évidence une rupture fragile. On ne peut donc pas utiliser l'essai de traction uniaxiale pour cette caractérisation, sauf à abaisser encore la température (et le résultat ne serait pas garanti).

## 2.2 Première estimation de la valeur du paramètre $m$

Afin d'estimer le paramètre  $m$  on utilise une comparaison entre le modèle de Beremin et le modèle de [Curry and Knott, 1979]. Ce dernier fait appel à une modélisation du comportement en traction uniaxiale via une loi puissance,  $n$  étant l'exposant d'érouissage. La valeur de  $n$  est comprise entre 0.13 et 0.16 (selon la température) pour l'acier considéré. On pose ici  $N = 1/n$ .

Les relations entre la ténacité (en déformations planes) et la limite d'élasticité sont les suivantes, pour chacun des modèles :

$$\text{Curry et Knott : } K_{Ic} \sigma_y^{\frac{N-1}{2}} = \text{constante}$$

$$\text{Beremin : } K_{Ic} \sigma_y^{\frac{m}{4}-1} = \text{constante}$$

2.4. Utiliser ces deux expressions pour déduire un premier estimateur de  $m$ . Quelle est sa sensibilité envers l'exposant d'érouissage ?

**Solution :** Il vient  $\frac{N-1}{2} = \frac{m}{4} - 1$ , d'où  $m = 2 + 2N = 2 + 2/n$ . Les valeurs numériques sont reportées dans le tableau R-1. L'écart relatif entre les valeurs de  $m$  est d'environ 20% dans l'intervalle de détermination utilisé.

$n$	0.13	0.14	0.15	0.16
Estimateur de $m$	17.38	16.29	15.33	14.50

TABLE R-1 – Première estimation de  $m$  via le modèle de [Curry and Knott, 1979]



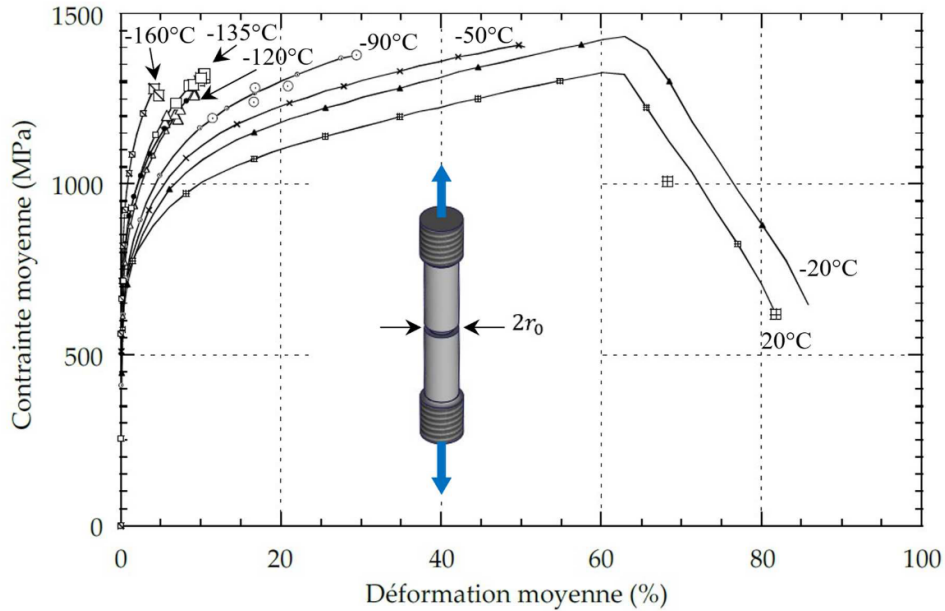


FIGURE 3 – Exemples de courbes de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées. Les températures d’essai sont indiquées près des courbes correspondantes.

### 3 Application du modèle de Beremin à des essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées

#### 3.1 Comportement macroscopique à rupture

La Figure 3 montre quelques courbes d’essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées. La contrainte moyenne (ou « contrainte nette ») est définie par le rapport entre l’effort de traction et l’aire initiale de la section au droit du fond d’entaille. La déformation moyenne est définie de la manière suivante :  $\bar{\epsilon} = 2 \log(r/r_0)$ ,  $r$  étant le rayon de l’éprouvette au droit du fond d’entaille, de valeur initiale  $r_0$ .

3.1. Qualifier le comportement macroscopique à rupture de ces éprouvettes, en fonction de la température.

**Solution :** A +20°C et -20°C, la courbe passe par un maximum puis l’effort chute, sans doute du fait d’une réduction d’aire importante. Le comportement macroscopique est donc ductile. A partir de -50°C et au-dessous, l’éprouvette casse avant que la charge ait atteint un maximum. Plus la température est basse et plus la déformation moyenne à rupture est faible, passant de 50% à -50°C à moins de 10% à -160°C. Le comportement devient plastique fragile, en particulier à partir de -120°C.

### 3.2 Détermination de la valeur de la contrainte à utiliser dans le modèle de Beremin

On considère ici les essais réalisés à des températures inférieures ou égales à  $-90^{\circ}\text{C}$ .

- 3.2. Déterminer l'intervalle des valeurs de contrainte nette à rupture. Peut-on utiliser ces valeurs pour caler les paramètres du modèle de Beremin ? Pourquoi ?

**Solution :** Les valeurs de la contrainte nette à rupture s'étendent d'environ 1250 MPa à environ 1350 MPa. Ce sont des valeurs moyennes de la contrainte axiale, qui est bien la contrainte principale maximale mais elle est hétérogène dans la section. L'amorçage du clivage a lieu dans une région de l'éprouvette où la contrainte est généralement différente de cette valeur moyenne. Il faut donc localiser le lieu de chaque amorçage et estimer la contrainte correspondante en utilisant un modèle de comportement mécanique, généralement via une simulation numérique.

### 3.3 Algorithme d'identification des paramètres du modèle de Beremin

- 3.3. Quelles prédictions du modèle de Beremin utilise-t-on pour comparer avec les données d'origine expérimentale ?

**Solution :** Pour comparer données expérimentales et prédictions du modèle de rupture, on utilise la distribution de probabilité de la contrainte de Weibull à rupture. Cette courbe est donnée dans le modèle de Beremin par  $P_f(\sigma_W) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\sigma_W}{\sigma_u}\right)^m\right)$  où la contrainte de Weibull est donnée par :

$$\sigma_W = \left(\int_{\text{PZ}} \sigma_1^m \frac{dV}{V_0}\right)^{1/m},$$

correspondant au moment d'ordre  $m$  de la distribution de la contrainte principale majeure sur la zone plastique.

- 3.4. Comment classer les essais sur éprouvettes axisymétriques entaillées de manière à tracer les courbes en question ?

**Solution :** Selon la localisation du site d’amorçage, et en présence d’une déformation plastique importante avant rupture, la contrainte principale maximale peut être passée par un maximum avant le moment de la rupture. Quelle valeur faut-il alors prendre dans le calcul de  $\sigma_W$ ? Pour s’affranchir de cette difficulté, on utilise une observable strictement croissante, la déformation à rupture. Aux très basses températures, lorsque le comportement est très fragile (comme ici à  $-90^\circ\text{C}$  et en dessous), la contrainte principale maximale au site d’amorçage est également croissante au cours de l’essai et le problème ne se pose pas pour le calcul de  $\sigma_W$ .

- 3.5. Proposer une méthode de détermination des paramètres du modèle de Beremin, en supposant que l’analyse mécanique des essais a été effectuée au préalable par simulation numérique, appuyée sur un modèle de comportement élasto-plastique adéquat.

**Solution :** Pour déterminer les paramètres de Beremin, il faut calculer une contrainte de Weibull à rupture pour chaque essai et comparer l’ensemble des valeurs  $P_f(\sigma_W)$  avec les prédictions du modèle. On utilise donc un post-traitement des calculs en élasto-plasticité, pour chaque température d’essai mais aussi pour chaque essai individuel, du fait de la dispersion des valeurs à rupture. On calcule ensuite l’écart entre les données expérimentales et la prédiction, par exemple, par une méthode des moindres carrés, pour optimiser le couple  $(m, \sigma_u)$ .

- 3.6. Justifier qu’une procédure itérative est indispensable.

**Solution :** La contrainte de Weibull,  $\sigma_W$ , est le moment d’ordre  $m$  de la contrainte principale maximale sur l’ensemble de la zone plastique. Sa valeur dépend donc de  $m$ . Les données « expérimentales » dépendent ainsi des paramètres du modèle! Il faut donc répéter le calcul de  $\sigma_W$  pour chaque éprouvette, pour chaque boucle d’optimisation du couple  $(m, \sigma_u)$ . La méthode est intrinsèquement itérative. On peut partir d’une valeur initiale de  $m$  donnée, par exemple, par l’utilisation du modèle de Curry et Knott comme cela a été fait dans l’exercice précédent.

### 3.4 Discussion des résultats de l’ajustement

La mise en œuvre de cette méthode sur les 25 essais disponibles donne  $m = 20$  et  $\sigma_u = 2351 \text{ MPa}$  pour un volume  $V_0$  de  $(100 \mu\text{m})^3$ . Le résultat est représenté sur la Figure 4.

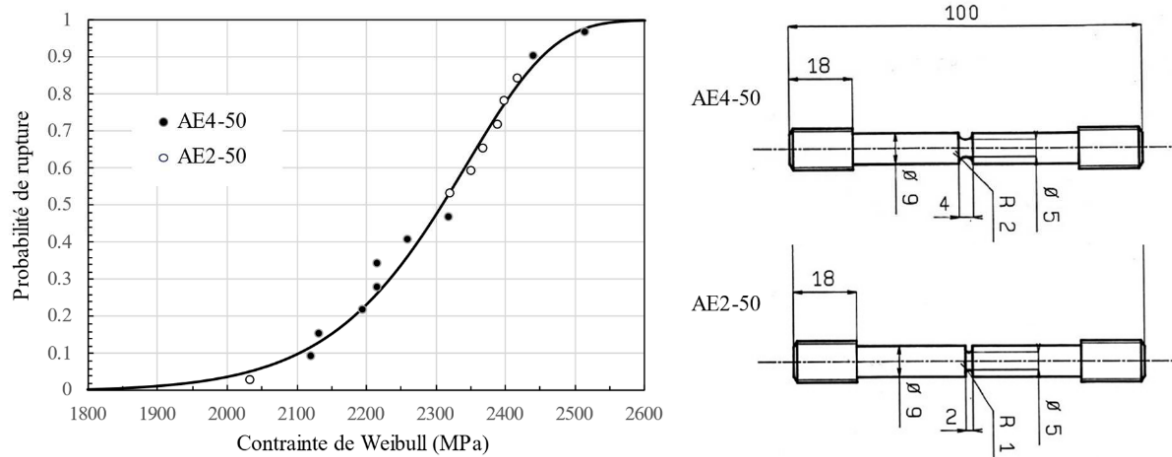


FIGURE 4 – Ajustement des paramètres du modèle de Weibull sur les données d’essais de traction sur éprouvettes axisymétriques entaillées. Les deux géométries sont représentées à côté du graphe, avec les cotes en millimètres.

3.7. Commenter la qualité de l’ajustement des paramètres du modèle.

**Solution :** L’ajustement de la courbe  $P_f(\sigma_W)$  par le modèle de Beremin semble de très bonne qualité sur l’ensemble de la distribution.

3.8. Commenter la valeur de  $m$  par rapport aux premières estimations faites à partir du modèle de Curry et Knott.

**Solution :** La valeur de  $m$  est légèrement plus haute que la valeur estimée via le modèle de Curry et Knott. Pour information, l’intervalle de confiance, pour  $m = 20$  et avec 25 essais sur éprouvettes axisymétriques entaillées, s’étend de 14.7 à 28.6.

3.9. Commenter la valeur de  $\sigma_u$  par rapport aux contraintes nettes à rupture déterminées à partir des courbes de la Figure 3.

**Solution :** La valeur de  $\sigma_u$  (2351 MPa) est bien plus élevée que la contrainte nette (1250 à 1350 MPa) : du fait du moment d’ordre  $m$  et de l’équivalence entre tous les volumes  $V_0$  en termes de population de défauts, les valeurs élevées de contrainte locale sur-sur-représentées dans le calcul de  $\sigma_W$ . On rappelle en outre que les valeurs de  $m$  et de  $V_0$  ne sont pas indépendantes, puisque la distribution de défauts est paramétrée pour une valeur donnée de  $V_0$ .

## Références

- [Allix et al., 1995] Allix, O., Ladeveze, P., and Corigliano, A. (1995). Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite structures*, 31(1) :61–74.
- [Curry and Knott, 1979] Curry, D. and Knott, J. (1979). Effect of microstructure on cleavage fracture toughness of quenched and tempered steels. *Metal Science*, 13(6) :341–345.
- [Lambert-Perlade, 2001] Lambert-Perlade, A. (2001). *Cleavage fracture of bainitic steel microstructures obtained under welding conditions (in French)*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.